

XXIII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(30 listopada 2007 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $xy - y = x - 5$ w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 2.

Wewnątrz kwadratu o boku długości jednej jednostki obrano 300 (330) różnych punktów. Wykazać, że istnieje koło o polu $\frac{1}{18}$ do którego należy co najmniej 10 z tych punktów.

Zadanie 3.

Z jednego punktu wyruszają w tym samym kierunku pojazdy z prędkościami odpowiednio równymi v_1, v_2, v_3 km/h, gdzie $0 < v_1 < v_2 < v_3$. Drugi pojazd rozpoczyna jazdę o 2 godziny później niż pojazd pierwszy. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia jazdy przez drugi pojazd powinien wyruszyć trzeci pojazd aby dogonić pierwszy jednocześnie z drugim?

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Rozwiązać równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ w liczbach naturalnych.

Zadanie 2.

Dowieść twierdzenie Ptolemeusza: „W każdym czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości par boków przeciwległych”.

Zadanie 3.

Dla jakich całkowitych wartości parametru m pierwiastkami równania $mx^2 - m^2x + m = x^2 + x - m^2$ są liczby całkowite?

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Dla jakich wartości x, y spełniona jest nierówność: $2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2} > 0$?

Zadanie 2.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w takim punkcie P , że pola trójkątów ABP i CDP są równe. Wykazać, że czworokąt jest trapezem.

Zadanie 3.

Wykazać, że jeżeli liczby α, β są różnymi pierwiastkami równania $x^4 + bx^3 - 1 = 0$ gdzie $b \in \mathbb{R}$, to liczba $\alpha \cdot \beta$ jest pierwiastkiem równania $x^6 + x^4 + b^2x^3 - x^2 - 1 = 0$.