XII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2011/2012)

Etap wojewódzki

14 kwietnia 2012, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że liczba $291^8 + 3 \cdot 291^4 - 4$ jest podzielna przez 400.
2. Ojciec postanowił podzielić swój majątek pomiędzy swoich synów. Najstarszemu z nich dał 1000 zł i 0,1 pozostałej części majątku, drugi otrzymał 2000 zł i o,1 nowej pozostałej części majątku, trzeciemu z nich przypadło 3000 zł i 0,1 tego, co jeszcze pozostało itd. W ten sposób każdy z synów otrzymał tyle samo pieniędzy. Oblicz, ile pieniędzy było do podziału, ilu było synów i po ile złotych przypadło każdemu z nich?
3. Wiadomo, że $x^2 + xy + y^2 = 4$ oraz $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$, wyznacz $x^6 + x^3y^3 + y^6$.
4. W romb o boku 4 i kącie ostrym 60° wpisano okrąg. Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu jest prostokątem i oblicza pole tego prostokąta.
5. W trapezie ABCD (AB || CD) dwusieczna kąta wewnętrznego ABC jest prostopadła do ramienia AD trapezu i ma z tym ramieniem punkt wspólny P. Punkt P dzieli ramię AD w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka A. Oblicz stosunek pola trójkąta ABP do pola czworokąta PBCD.

Powodzenia!

XII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2011/2012)

Etap wojewódzki

14 kwietnia 2012, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich *a, b, c, d* zachodzi:
$$a + b + c + d \geq 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[12]{a} \cdot \sqrt[6]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt{d}\ .$$
2. Dwa okręgi o promieniach *R* i *r* (*R* > *r*) są styczne zewnętrznie. Wyznacz promień okręgu stycznego zewnętrznie do obydwu danych okręgów oraz stycznego do stycznej do tych okręgów, nie przechodzącej przez ich punkt styczności.
3. Oblicz pole wielokąta jaki tworzą wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^4-4x^3+5x^2-4x+2}{x^2-3x+1}$.
4. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są jednocześnie sumami i różnicami dwóch liczb pierwszych.
5. Mianownik pewnego nieskracalnego ułamka, będącego ilorazem dwóch liczb naturalnych, jest większy o 8 od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli mianownik tego ułamka zmniejszymy o 4, to otrzymamy liczbę większą od $\frac{1}{5}$, a jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 1 i mianownik zmniejszymy o 6, to otrzymamy liczbę mniejszą od $\frac{1}{2}$. Co to za ułamek?

Powodzenia!