VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy
19 maja 2007, godzina 10.00 (150 minut)

1. Dla dowolnej liczby naturalnej symbolem $n!$ (czytaj: n silnia) oznaczamy liczbę:
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$
Wyznacz największą liczbę naturalną n o tej własności, że liczba 100! jest podzielna przez 7^n.

2. Rozwiąż układ w liczbach rzeczywistych: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$.

3. Wyznaczyć najmniejszą (największą) wartość funkcji $f(x) = \frac{x^3+16}{x}$, gdy x > 0 i podaj argument, dla którego ta wartość jest przyjmowana.

4. Cięciwa $\overline{AB}$ okręgu przecina średnicę $\overline{XX'}$ tego okręgu w punkcie P takim, że kąt APX ma miarę $45°$. Znając długość r promienia tego okręgu, obliczyć $AP^2 + PB^2$.

5. Wykaż, że istnieje liczba postaci: 200720072007...20070...0, która jest podzielna przez 2008.

Powodzenia!

VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy
19 maja 2007, godzina 10.00
(150 minut)

1. Wyznacz wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^3+3x^2+6x+2}{x^2+x+2}$ o współrzędnych całkowitych.

2. Wykaż, że wśród 2007 różnych liczb naturalnych zawsze można znaleźć takie trzy liczby a, b, c, że a(b – c) jest podzielne przez 2007.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność:
$$a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3 \ .$$

4. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$ ma pierwiastek dwukrotny, to $4a^3 + 27b^2 = 0$.

5. Od trójkąta ABC odcięto, prostymi równoległymi do boków trójkąta i stycznymi do koła wpisanego w ten trójkąt, trzy trójkąty narożne. Udowodnij, że suma długości promieni kół wpisanych w odcięte trójkąty jest równa długości promienia koła wpisanego w trójkąt ABC.

Powodzenia!