V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy
16 kwietnia 2005, godzina 10.00 (150 minut)

1. S jest punktem przecięcia przekątnych czworokąta wypukłego ABCD, zaś punkty O_1, O_2, O_3, O_4 są środkami okręgów opisanych na trójkątach: ABS, BCS, DCS i ADS. Udowodnij, że czworokąt $O_1O_2O_3O_4$ jest równoległobokiem.

2. W jakim prostokącie, którego długości boków są liczbami całkowitymi, obwód i pole wyrażają się tymi samymi liczbami ?

3. Udowodnij, że jeżeli a^3+b^3 i $a+b$ są liczbami wymiernymi oraz $a+b\neq 0$, to a^2+b^2 jest również liczbą wymierną.

4. Pole równoramiennego trapezu opisanego na okręgu jest równe S. Oblicz długość ramienia tego trapezu, jeśli jego kąt ostry ma miarę 30^0.
   Możesz skorzystać z twierdzenia: W czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków są równe.

5. Wykaż, że jeżeli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $ab=1$, to $(x+a)(x+b)\geq(x+1)^2$.

Powodzenia!

V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy
16 kwietnia 2005, godzina 10.00 (150 minut)

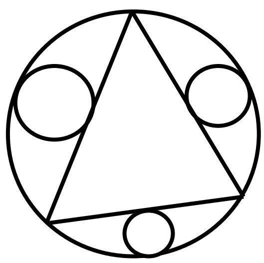
1. Która z liczb $\frac{3^{2003}+1}{3^{2004}+1}$ czy $\frac{3^{2004}+1}{3^{2005}+1}$ jest większa ? Odpowiedź uzasadnij.

2. Znajdź wszystkie czwórki liczb rzeczywistych x, y, z, n, dla których
$$x^2+y^2+z^2+n^2=x^3+y^3+z^3+n^3=1$$

3. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x)=x^3+ax+b$ ma pierwiastek dwukrotny, to $4a^3+27b^2=0$.

4. Wielokąt opisany na okręgu o promieniu R rozcięto na trójkąty. Wykazać, że suma promieni okręgów wpisanych w te trójkąty jest większa od R.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego kąty wewnętrzne mają miary α, β, γ wpisany w okrąg o promieniu R. Niech O_1, O_2 i O_3 będą środkami okręgów stycznych wewnętrznie do danego okręgu i stycznych do boków trójkąta ABC w punktach będących środkami jego boków w taki sposób jak ilustruje rysunek. Oblicz pole trójkąta $O_1O_2O_3$.



Powodzenia!