

# XIII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

## IM. HUGONA STEINHAUSA

7 grudnia 2013

### Klasa I

1. Uzasadnij, że dowolna liczba naturalna większa od 6 może być przedstawiona w postaci sumy dwóch liczb naturalnych większych od 1, których największy wspólny dzielnik jest równy 1.
2. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona do przeciwprostokątnej ma długość 12 cm i jest 5 razy krótsza od obwodu tego trójkąta. Oblicz długość przeciwprostokątnej.
3. Wykaż, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą większą od 2, to liczba  $p^2 - 17$  jest podzielna przez 8.
4. (S) Na początek dwie definicje. 1) Punkty kratowe w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, to punkty o obu współrzędnych całkowitych. 2) Wnętrzem koła o środku w punkcie P i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu P jest mniejsza od  $r$ .

A teraz zadanie. Wyznacz promień możliwie największego koła, do którego wnętrza należą dokładnie dwa punkty kratowe. Uzasadnij swój wybór.

---

### Klasa II

1. Wykaż, że jeśli do dowolnej liczby 2013 – cyfrowej (zapisanej w układzie dziesiętnym) dopiszemy tę samą liczbę, to otrzymana liczba 4026 – cyfrowa jest podzielna przez 77.
2. Wiedząc, że  $x + \frac{1}{x} = a$ , gdzie  $a$  jest daną liczbą, oblicz  $x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$ .
3. Oblicz pole trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu długości 2cm, jeśli wiadomo, że odległość stycznej do tego okręgu, poprowadzonej w wierzchołku kąta prostego, od jednego z pozostałych wierzchołków tego trójkąta jest równa 3 cm.
4. (S) Na początek dwie definicje. 1) Punkty kratowe w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, to punkty o obu współrzędnych całkowitych. 2) Wnętrzem koła o środku w punkcie P i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu P jest mniejsza od  $r$ .

A teraz zadanie. Wyznacz promień możliwie największego koła, do którego wnętrza należą dokładnie trzy punkty kratowe. Uzasadnij swój wybór.

---

### Klasa III

1. Udowodnij, że ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 2013\}$  można usunąć 1006 liczb tak, aby suma liczb które pozostały, była kwadratem liczby naturalnej.
2. Wykaż, że jeśli  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, to zachodzi nierówność  $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ .
3. Wykaż, że jeśli do dowolnej liczby 2013 – cyfrowej (zapisanej w układzie dziesiętnym) dopiszemy tę samą liczbę, to otrzymana liczba 4026 – cyfrowa jest podzielna przez 143.
4. (S) Na początek dwie definicje. 1) Punkty kratowe w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, to punkty o obu współrzędnych całkowitych. 2) Wnętrzem koła o środku w punkcie P i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu P jest mniejsza od  $r$ .

A teraz zadanie. Wyznacz promień możliwie największego koła, do którego wnętrza należą dokładnie cztery punkty kratowe. Uzasadnij swój wybór.