## X JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
## IM. HUGONA STEINHAUSA

**4 grudnia 2010 r.**

### Klasa pierwsza

1. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $9^n \cdot (9^n + 1) + 1$ jest złożona.
2. Dwa okręgi są zewnętrznie styczne w punkcie P. Wykaż, że jeśli przez punkt P poprowadzimy dowolną sieczną, to przetnie ona okręgi w takich punktach, różnych od P, że styczne poprowadzone do okręgów w tych punktach są równoległe.
3. Wykaż, że istnieją co najmniej dwie naturalne potęgi liczby 2 takie, że ich różnica jest podzielna przez 1000.
4. 4(S).Mamy dwa trójkąty. Każdy bok pierwszego z nich jest większy od każdego boku drugiego. Czy wynika stąd, że pole pierwszego trójkąta jest większe od pola drugiego ? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.

**Czas pracy - 150 minut.**

---


## X JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
## IM. HUGONA STEINHAUSA

**4 grudnia 2010 r.**


### Klasa druga

1. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na tym okręgu obrano dowolny punkt P. Uzasadnij, że jeden z odcinków PA, PB, PC ma długość równą sumie długości dwóch pozostałych.
2. Dla jakich naturalnych n wyrażenie $\frac{n-37}{n+43}$ jest kwadratem liczby wymiernej?
3. Wykaż, że wyrażenie $W = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$ jest dodatnie dla wszystkich liczb x, y, z takich, że $x > y > z$.
4. 4(S).Trzej koledzy: Adam, Bartek i Marek mają zamiar kupić porcję atramentu do piór wiecznych za 22 zł. Gdyby atramentu nie używał Marek, jego kolegom wystarczyłby on na 30 dni; gdyby nie używał Bartek – pozostali mieliby atrament na 15 dni; a gdyby nie używał atramentu Adam, to wspólnicy wyczerpaliby zapas po 12 dniach. Na ile dni wystarczy atramentu wszystkim trzem i jak powinni rozłożyć między siebie wydatek na ten zakup ?

**Czas pracy - 150 minut.**

---


## X JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
## IM. HUGONA STEINHAUSA

**4 grudnia 2010 r.**


### Klasa trzecia

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, k dla których $n^2 - k^2$ jest trzecią potęgą liczby pierwszej.
2. Uzasadnij, że żadna z liczb postaci $2^{n+1} + 5^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, nie jest liczbą pierwszą.
3. Wykaż, że jeśli w trójkącie ABC kąty wewnętrzne spełniają warunek $\beta = 3\alpha$, to wtedy długości boków spełniają warunek $\frac{c^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a}$.
4. 4(S).Zbadaj, czy liczba $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\dots}}}}$ jest mniejsza od 3, czy większa. Odpowiedź dokładnie uzasadnij.

**Czas pracy - 150 minut.**