

**IX JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA**

5 grudnia 2009 r.

Klasa pierwsza

1. Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Wyznacz liczbę naturalną n taką, że $(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})^3 = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.
2. Udowodnij, że do wykresu funkcji $f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{2}$ nie należy żaden punkt kratowy, czyli punkt o obu współrzędnych całkowitych.
3. Wykaż, że jeśli połączymy środki kolejnych boków czworokąta wypukłego, to otrzymamy równoległobok.
4. S. Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ nie jest podzielna przez 5.

Czas pracy - 150 minut.

**IX JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA**

5 grudnia 2009 r.

Klasa druga

1. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 12 cm i 16 cm oblicz odległość środka okręgu wpisanego w ten trójkąt i środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
2. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność $4a^3 + 6b^2 + 2 \geq 12ab$.
3. Udowodnij, że wielomian $W(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 1$ ma trzy różne pierwiastki niewymierne.
4. S. Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez 13.

Czas pracy - 150 minut.

**IX JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA**

5 grudnia 2009 r.

Klasa trzecia

1. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4 \end{cases}$$
2. Kąt ostry trójkąta prostokątnego o polu S ma miarę α . Wyznacz odległość środka ciężkości tego trójkąta od jego przeciwprostokątnej.
3. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby naturalne. Udowodnij, że jeśli w tym ciągu występuje wyraz, który jest kwadratem liczby naturalnej, to w tym ciągu jeszcze co najmniej jeden z wyrazów jest kwadratem liczby naturalnej.
4. S. Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez 181.

Czas pracy - 150 minut.